4.3 Есеп шығару үлгілері

Есеп №1. $z = e^{-\left(x^3+y^3\right)}$ функциясының дербес туындылары мен дербес дифференциалдарын табыңыз.

Шешуі. $z'_x = e^{-\left(x^3+y^3\right)} \cdot \left(-3x^2\right) = -\dfrac{3x^2}{e^{x^3+y^3}}$, $z'_y = e^{-\left(x^3+y^3\right)} \cdot \left(-3y^2\right) = -\dfrac{3y^2}{e^{x^3+y^3}}$

$$d_x z = z'_x dx = -\frac{3x^2 dx}{e^{x^3+y^3}}; \; d_y z = z'_y dy = -\frac{3y^2 dy}{e^{x^3+y^3}}$$

Есеп №2. $f(x,y,z) = \arcsin\left(x\sqrt{y}\right) - yz^2$ функциясының $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ дербес туындыларының $M_0(0,4,1)$ нүктесіндегі мәндерін үтірден кейін екі орынға дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. $f'_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{y}\right)^2}} \cdot \sqrt{y}$; $f'_x(0,4,1) = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1-0}} = 2$; $f'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x\sqrt{y}\right)^2}} \cdot \dfrac{x}{2\sqrt{y}} - z^2$;

$f'_y(0,4,1) = 0 - 1^2 = -1$; $f'_z = -2yz$; $f'_z(0,4,1) = -2 \cdot 4 \cdot 1 = -8$

Жауабы: $f'_x = (0,4,1) = 2$; $f'_y(0,4,1) = -1$; $f'_z(0,4,1) = -8$

Есеп №3. $z = arctg(2x - y)$ функциясының толық дифференциалын табыңыз.

Шешуі. $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$z'_x = \frac{1}{1+(2x-y)^2} \cdot 2; \; z'_y = \frac{1}{1+(2x-y)^2} \cdot (-1); \; dz = \frac{2dx}{1+(2x-y)^2} - \frac{dy}{1+(2x-y)^2}$$

Жауабы: $dz = \dfrac{2dx - dy}{1+(2x-y)^2}$

Есеп №4. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}$, мұндағы $x = \ln t$, $y = t^3$ болатын күрделі функциясының туындысын $t_0 = 1$ нүктесінде мәнін үтірден кейін екі орынға дейінгі дәлдікпен есептеңіз.

Шешуі. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+3}}; \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+3}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+3}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}; \; \frac{dy}{dt} = 3t^2; \; x(1) = \ln 1 = 0; \; y(1) = 1^3 = 1; \; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{0}{\sqrt{0+1+3}} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1+3}} = \frac{1}{2}; \; \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = \frac{1}{1} = 1; \; \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 3 \cdot 1^2 = 3; \; \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Жауабы: $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=1} = 1{,}5$

Есеп №5. S: $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1$ бетіне $M_0(1,-1,2)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық пен нормальдің теңдеуін табыңыз.

Шешуі. Жанама жазықтықтың теңдеуін қолданып,

$$z'_x(M_0)(x-x_0)+z'_z(M_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

Есеп шартынан $z'_x=4x+y+3;$ $z'_x(1,-1,2)=4-1+3=6$ $z'_y=-6y+x;$ $z'_y(1,-1,2)=6+1=7$. аламыз. Онда жанама жазықтықтың теңдеунің түрі:

$$6(x-1)+7(y+1)-(z-2)=0$$

$$6x+7y-z-6+7+2=0$$

$$6x+7y-z+3=0$$

Ал нормальдің теңдеуін $\dfrac{x-x_0}{z'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{z'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ қолданып, $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-2}{-1}$ аламыз.

Есеп №6. $z=tg(xy^2)$ функциясының екінші ретті дербес туындыларын табыңыз. $z''_{xy}=z''_{yx}$ теңдігінің орындалатынына көз жеткізіңіз.

Шешуі. $z'_x=\dfrac{1}{\cos^2(xy^2)}\cdot y^2=\dfrac{y^2}{\cos^2(xy^2)}$

$$z''_{xx}=y^2\left(\cos^{-2}(xy^2)\right)'_x=y^2\cdot\left(-2\cos^{-3}(xy^2)\right)\left(-\sin(xy^2)\right)\cdot y^2=\frac{2y^4\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)}$$

$$z'_y=\frac{1}{\cos^2(xy^2)}\cdot 2xy=\frac{2xy}{\cos^2(xy^2)}$$

$$z''_{yy}=2x\cdot\left(\frac{y}{\cos^2(xy^2)}\right)'_y=2x\cdot\frac{1\cdot\cos^2(xy^2)-y\cdot 2\cos(xy^2)\left(-\sin(xy^2)\right)\cdot 2xy}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2x\frac{\cos(xy^2)+4xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)};$$

$$z''_{xy}=\left(z'_y\right)'_x=2y\cdot\left(\frac{x}{\cos^2(xy^2)}\right)'_x=2y\cdot\frac{1\cdot\cos^2(xy^2)-x2\cos xy^2\left(-\sin(xy^2)\right)\cdot y^2}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2y\cdot\frac{\cos(xy^2)+2xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)}$$

$$z''_{yx}=\left(z'_x\right)'_y=\left(\frac{y^2}{\cos^2(xy^2)}\right)'_y=\frac{2y\cos^2(xy^2)-y^2 2\cos(xy^2)\left(-\sin(xy^2)\right)\cdot 2xy}{\cos^4(xy^2)}=$$

$$=2y\frac{\cos(xy^2)+2xy^2\sin(xy^2)}{\cos^3(xy^2)};$$

Сонымен, $z''_{xy}=z''_{yx}$

Есеп №7. $z=2(x+y)-x^2-y^2$ функциясын экстремумға зерттеңіз.

Шешуі. Функцияның экстремумы болуының қажетті шартын қолданып, стационар нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2x=0 \\ 2-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \ A(1,1)$$ - берілген функцияның стационар нүктесі

z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} екінші ретті туындыларын табамыз.

$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(2-2x\right)'_x = -2$; $z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(2-2y\right)'_y = -2$; $z''_{xy} = 0$

Функцияның экстремум болуының жеткілікті шартын қолданып,

$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$ экстремумы бар екенін көреміз. $z''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow$ (1,1) нүктесінде функцияның максимумы бар. $z_{\max} = z(1,1) = 2(1+1) - 1^2 - 1^2 = 4 - 1 - 1 = 2$

Жауабы: $z_{\max} = z(1,1) = 2$